A. PROPRIÉTÉS DE $\mathbb{R}$

1. * : Densité de $\mathbb{Z}+\sqrt{2}\mathbb{Z}$.

   (a) Montrer que $\sqrt{2}$ est limite d'une suite de rationnels.

   (b) Soit x un réel ; montrer qu'il existe deux suites d'entiers (a_n) et (b_n) telles que $a_n+b_n\sqrt{2}$ tend vers x. En déduire que $\mathbb{Z}+\sqrt{2}\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

   (c) Donner deux entiers a et b tels que $a+b\sqrt{2}$ approche $\sqrt{3}$ à moins de 10^{-3}.

B. GÉNÉRALITÉS SUR LES FONCTIONS

2. : Soit $f:\left|\begin{array}{l}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto\dfrac{x}{1+|x|}\end{array}\right.$

   Tracer $\mathcal{C}_f$ (remarquer qu'elle est formée de portions d'hyperboles).

   Vérifier que f est injective sur $\mathbb{R}$, et définir la fonction f^{-1}, réciproque de f sur $\mathbb{R}$, avec une seule formule.

3. : Ayant tracé la courbe de f et celle de g dans un même repère, donner une méthode pour construire points par points celle de $g\circ f$; appliquer au tracé de $y=e^{-x^2}$.

C. LIMITES-ÉQUIVALENTS

4. : Démontrer qu'une fonction périodique sur $\mathbb{R}$ non constante n'admet pas de limite en $+\infty$.

5. : Soient f une fonction numérique définies et strictement positives sur $\mathbb{R}_+$; Montrer que lorsque $x\to+\infty$

$$\begin{aligned}
f(x) &= o(x)\Leftrightarrow\forall\lambda>0\quad\exists A>0\quad\forall x>A\quad f(x)\leqslant\lambda x\\
f(x) &= O(x)\Leftrightarrow\exists\ \lambda>1\quad\forall x\geqslant 0\quad f(x)\leqslant\lambda x\\
f(x) &\sim x\Leftrightarrow\forall\ \lambda>1\ \ \forall\mu\in]0,1[\quad\mu x\leqslant f(x)\leqslant\lambda x
\end{aligned}$$

   Représenter ces conditions par un dessin.

6. Limites de **FONCTIONS ALGÉBRIQUES**

   Déterminer un équivalent simple des expressions suivantes, et en déduire la limite. Si la limite n'existe pas, envisager la limite à droite ou la limite à gauche.

   Rappels :

   a) si $\alpha<\beta$, $x^\alpha=o\left(x^\beta\right)$ quand $x\to+\infty$ et $x^\beta=o\left(x^\alpha\right)$ quand $x\to0$

   b) $(1+u)^\alpha=1+\alpha u+o(u)$ quand $u\to0$

   (a) $x\to0$:

      i. $\dfrac{1}{x(x+1)}-\dfrac{1}{x}$

      ii. $\dfrac{\sqrt{x+4}-\sqrt{3x+4}}{\sqrt{x+1}-1}$

      iii. $\sqrt{4-2x}-\sqrt[3]{8+3x}$

      iv. $\sqrt[3]{x^3+8x}-\sqrt[3]{x^3+x}$

      v. $\sqrt[3]{8x^3+x}-\sqrt[3]{x^3+x}$

      Rep : i. -1 ii. -1 iii. $-(3x/4)$ iv. $\sqrt[3]{x}$ v. $(7/3)\,x^2\sqrt[3]{x}$.

   (b) $x\to+\infty$:

      i. $\sqrt{a+x}-\sqrt{x}$

      ii. $\sqrt{x^2+x}-x$

      iii. $\dfrac{x-\sqrt{x^2+1}}{x^2-\sqrt{x^2+1}}$

      iv. $\dfrac{x}{\sqrt{x+1}}-\dfrac{x}{\sqrt{x+2}}$

v. $\dfrac{\sqrt[4]{x+1}-\sqrt[4]{x}}{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x}}$

Rep : i. $a/\left(2\sqrt{x}\right)$ ii. $1/2$ iii. $-1/(2x^3)$ iv. $1/\left(2\sqrt{x}\right)$ v. $3/\left(4\sqrt[12]{x}\right)$

(c) $x \to -\infty$:

i. $\dfrac{x-\sqrt{x^2+1}}{x^2-\sqrt{x^2+1}}$

ii. $\sqrt{x^2+2x}+x$

Rep : i. $2/x$ ii. -1.

(d) $x \to 4$: $\dfrac{\sqrt{x}-2}{x^2-5x+4}$

(e) $x \to 1$: $\dfrac{1-\sqrt{2-\sqrt{4-3x}}}{1-\sqrt{2-\sqrt{\frac{1}{3-2x}}}}$

(f) $x \to 8$: $\dfrac{\sqrt[3]{x}-2}{\sqrt[3]{x+19}-3}$

(g) $x \to 0, 2, +\infty, -\infty$: $\dfrac{\sqrt{x^2+16}-\sqrt{4x^2+2x}}{x\,(x-2)}$

Rep : (d) $1/12$ (e) $-3/2$ (f) $9/4$ (g) $-2/x, -7\sqrt{5}/20, -1/x, 1/x$.

7. limites de **FONCTIONS ALGEBRIQUES EN** $\sin, \cos, \tan$:

Déterminer un équivalent simple puis la limite des expressions suivantes. Si la limite n'existe pas, envisager la limite à droite ou la limite à gauche.

Rappels : $\sin u \sim \tan u \sim u$ quand $u \to 0$; $\cos u = 1 - \dfrac{u^2}{2} + o\left(u^2\right)$ quand $u \to 0$.

(a) $x \to 0$:

i. $\dfrac{\sin ax}{\sin bx}$ et $\dfrac{\tan ax}{\tan bx}$ $(b \neq 0)$

ii. $\dfrac{1-\cos x}{\sin^2 x}$

iii. $\dfrac{x^2}{\tan^2 x - 2\sin^3 x}$

iv. $\dfrac{\sin x - \tan x}{x - x\cos x}$

v. $\dfrac{\tan 2x}{\sqrt{1-\cos x}}$

vi. $\dfrac{\sin x + \tan x}{\sqrt{9x^2+2x^3}}$

vii. $\dfrac{\sqrt{1-\cos 2x}}{\sin 3x}$

viii. $\dfrac{\cos x - \cos 2x + \sin 3x}{\sqrt{\cos x - \cos 2x}}$

ix. $\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}$

x. $\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{\sin^2 x}$

xi. $\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{\cos x}$

xii. $1-\cos x\sqrt{\cos 2x}$

Rep : iii. 1 v. $2\sqrt{2}$signe(x) vi. $2.$signe$(x)/3$ vii. $\sqrt{2}/3.$signe(x) viii. $\sqrt{6}.$signe(x) ix. x x. $\left(\sqrt{2}/8\right)$ xi. $x/2$ xii. $3x^2/2$

(b) $x \to \dfrac{\pi}{2}$: $\tan x \sin 2x$

(c) $x \to \frac{\pi}{3}$: $\dfrac{\sin 3x}{1-2\cos x}$

(d) $x \to \frac{2\pi}{3}$: $\dfrac{\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)-\sin\frac{x}{4}}{\tan 3x}$

(e) $x \to ????$: $\dfrac{\sqrt{3}\tan x-1}{2\cos x-\sqrt{3}}$

(f) $x \to a$: $\dfrac{\sin(x-a)}{\sin x-\sin a}$

(g) $x \to +\infty$: $x\sin\dfrac{\pi}{x}$

(h) $x \to +\infty$, θ fixé, puis $\theta \to 0$, x fixé : $\dfrac{\sin\theta}{x\sin\frac{\theta}{x}}$

Rep : (b) 2 (c) $-\sqrt{3}$,(d) $-5\sqrt{3}/24$,(e) $-4/\sqrt{3}$,(f) $1/\cos a$,(g) π ,(h) $\sin\theta/\theta, 1$.

8. **FONCTIONS ALGÉBRIQUES EN** $\ln$:

Déterminer un équivalent simple puis la limite des expressions suivantes quand $x \overset{>}{\to} 0$ et quand $x \to +\infty$:

Rappels :
$\ln ab = \ln a + \ln b$
$\ln(a+b) = \ln a + \ln\left(1+\dfrac{b}{a}\right)$
lorsque $u \to +\infty$ et $\alpha > 0$: $\ln u = o(u^\alpha)$
lorsque $u \to 0$ et $\alpha > 0$: $\ln u = o\left(\dfrac{1}{u^\alpha}\right)$
lorsque $u \to 0$ $\ln(1+u) = u + o(u) \sim u$

(a) $x^n \ln x$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.

(b) $\dfrac{\ln x}{x^n}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.

(c) $x\ln\left(x^2\right)$

(d) $\ln x - x^n$

(e) $\ln x + \frac{1}{x^n}$

(f) $\dfrac{(\ln x)^{100}}{\sqrt{x}}$

(g) $(\ln x)^{100} - \sqrt{x}$

(h) $x\ln(x+1) - \sqrt{x}$

(i) $\dfrac{\sqrt{x+1}-\ln(10x)}{\sqrt{x}}$

(j) $\dfrac{\ln(ax)}{\ln(bx)}$ $(a, b > 0)$

9. : Déterminer un équivalent simple puis la limite des expressions suivantes quand $x \to 0$:

(a) $\dfrac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}}$

(b) $\dfrac{\ln(1+x)}{x^2+x}$

(c) $\dfrac{\ln\left(1+x+x^2\right)}{x^2}$

10. Déterminer un équivalent simple puis la limite des expressions suivantes quand $x \to +\infty$:

(a) $\ln\left(3x^2+4x-5\right) - \ln(6x+1)$

(b) $\ln\left(x^2-4\right) - \ln\left(x^2+1\right)$

(c) $\dfrac{\ln(x+1)-\ln x}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}$

(d) $\dfrac{x\ln x-(x-t)\ln(x-t)}{x}$

Rep : (a) $\ln x$ (b) $-\dfrac{5}{x^2}$ (c) $2/\sqrt{x}$

11. Déterminer la limite de $\dfrac{x\ln x-(x-t)\ln|x-t|-t\ln t}{x-t}$ quand $x\to t>0$

12. : **FONCTIONS ALGEBRIQUES EN** $\exp$

Déterminer un équivalent simple puis la limite des expressions suivantes quand $x\to\pm\infty$:

(a) $\dfrac{e^x}{x^{100}}$

(b) e^x-x^{100}

(c) $e^x-\frac{1}{x^{1000}}$

(d) $e^{-x}+x^2$

(e) $e^{\sqrt{|x|}}-x$

(f) $\dfrac{e^{2x}-e^x}{x^{100}}$

(g) $e^{2x}-x^{100}e^x$

13. : Déterminer un équivalent simple puis la limite des expressions suivantes quand $x\to 0$:

(a) $\dfrac{e^{\sqrt{x}}-1}{\sqrt{x}}$

(b) $\dfrac{e^{4x^2}-1}{x^2-4x}$

(c) $\dfrac{e^{x+1}-1}{x^2-x}$

(d) $\dfrac{e^{x+1}-e}{x}$

(e) $\dfrac{e^{\ln(x+1)}-1}{2x}$

Rep : (a)1 (b)$-x$ (c)$\dfrac{e-1}{-x}$ (d)e (e) 1/2

14. : Déterminer un équivalent simple puis la limite des expressions suivantes quand $x\to+\infty$:

(a) $x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)$

(b) $x\left(e^{\frac{1}{x}}-e^{-\frac{1}{x}}\right)$

(c) $x\left(e^{\frac{1}{x^2}}-e^{\frac{1}{x}}\right)$

15. : **FONCTIONS PUISSANCES**

(forme indéterminée "1^∞"); déterminer la limite quand $x\to+\infty$ des expressions suivantes :

Rappel : $a^b=e^{b\ln a}$

(a) $\left(1+\dfrac{a}{x}\right)^{bx}$ (le résultat peut être utilisé dans la suite).

(b) $\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{3x-2}$

(c) $\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^{x}$

(d) $\left(\dfrac{3x-4}{3x+2}\right)^{\frac{x+1}{3}}$

(e) $\left(\dfrac{x+3}{x-1}\right)^{x+2}$

(f) $\left(\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-4x+2}\right)^{x}$

REP : $e^{ab}, e^6, e^2, e^{-2/3}, e^4, e^2$.

16. Déterminer un équivalent quand $x \to +\infty$ des expressions suivantes :

(a) $\left(2+\dfrac{1}{x}\right)^{x}$

(b) $\left(\dfrac{3x-1}{x+1}\right)^{2x}$

Rep pour (a) : $\sqrt{e}2^x$.

17. : Trouver des fonctions a et b avec $\lim\limits_{x\to+\infty} a(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} b(x) = 0$ et telles que :

(a) $\lim\limits_{x\to+\infty} (a(x))^{b(x)} \in]0,1[$

(b) $\lim\limits_{x\to+\infty} (a(x))^{b(x)} = 0$

Retenez donc que la forme indéterminée "0^0" n'est pas toujours égale à 1...

18. : **MISCELLANÉES** ...

Déterminer un équivalent simple puis la limite de chacune des expressions suivantes :

(a) $\tan x \ln x$ pour $x \to 0$

(b) $\dfrac{e^{x^2}-\cos x}{x^2}$ pour $x \to 0$

(c) $(\ln(1+x))^x$ pour $x \to 0$

(d) $\dfrac{e^x - e^{-x}}{\sin x}$ pour $x \to 0$

(e) $\dfrac{\ln \cos x}{x^2}$ pour $x \to 0$

(f) $(\cos x)^{\frac{1}{\sin x}}$ pour $x \to 0$

(g) $(\cos x + \sin x)^{\frac{1}{x}}$ pour $x \to 0$

(h) $\left(1+\tan^2\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{2x}}$ pour $x \to 0$

(i) $\dfrac{1}{x}\ln\dfrac{\sin(a-x)}{\sin a}$ pour $x \to 0$

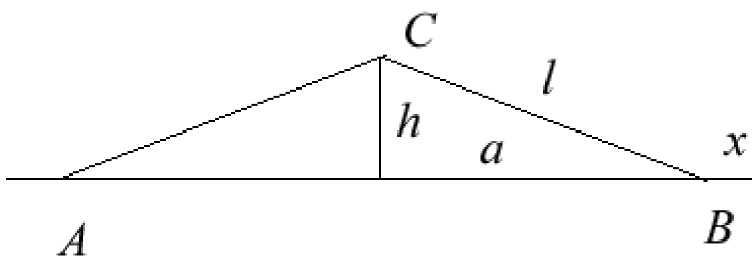
(j) $\dfrac{\ln x^n - \ln x_0^n}{\sin x - \sin x_0}$ pour $x \to x_0$

(k) $\dfrac{\ln\tan x}{\ln\tan 3x}$ pour $x \to \frac{\pi}{2}$

(l) $\left(1-\dfrac{\ln(1+x)}{\ln x}\right)^{\dfrac{1}{x}}$ pour $x \to 0$ et $x \to 1$.

REP : a) $x\ln x$ b) $3/2$ c) 1 d) 2 e) $-1/2$ f) 1 g) e h) $\sqrt{e}$ i) $-\cot a$ j) $\dfrac{1}{x_0 \sin x_0}$ k) 1 l) 1 puis $\dfrac{\ln 2}{1-x}$

19. : La croissance des montagnes.



On considère un triangle isocèle ABC de base $AB = 2a$, de côté $AC = BC = l$ fixé et de hauteur h; on pose $x = l - a$.

(a) Calculer h en fonction de l et x montrer que lorsque $x \to 0$, h équivaut à $\sqrt{2lx}$ et que donc $h >> x$, (alors qu'à priori on pense que h et x sont du même ordre)

(b) A.N. 1: $l = 1$ m, $x = 1$ mm , $h = ?$
A.N. 2: $h = 4811$ m, $l = 500$ km, $x = ?$

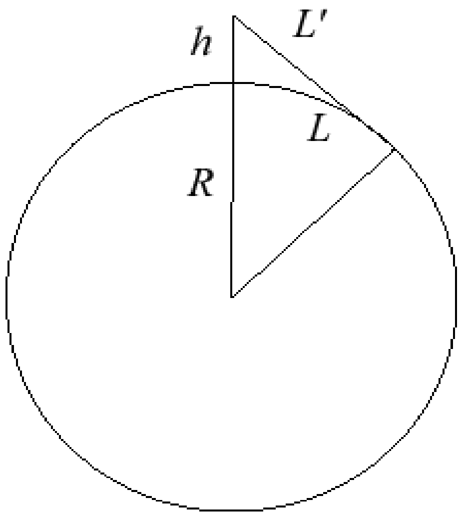
20. * : Un rail fixé en ses deux extrémités, de longueur $2l$ se dilate d'une longueur $2x$ en prenant la forme d'un arc de cercle, de flèche h, de rayon R et d'angle au centre 2α.

(a) Montrer successivement : $h = 2R\sin^2\dfrac{\alpha}{2}$; $R = \dfrac{l+x}{\alpha} = \dfrac{l}{\sin\alpha}$; $\dfrac{\sin\alpha}{\alpha} = \dfrac{l}{l+x}$; $h = l\tan\dfrac{\alpha}{2}$.

(b) Déterminer une valeur approchée de h à l'aide de la fonction solve de la calculatrice pour $2l = 500$ m et $x = 1$ cm.

(c) Démontrer que lorsque $x \to 0$, $h \sim \dfrac{\alpha}{2}l \sim \sqrt{\dfrac{3}{2}lx}$; on utilisera le développement $\sin\alpha = \alpha - \dfrac{\alpha^3}{6} + o\left(\alpha^3\right)$.
Comparer la valeur approchée du (b) avec la valeur approchée obtenue en utilisant cet équivalent. Comparer aussi les résultats des exercices 19 et 20.

21. : La portée d'un promontoire d'altitude h est la longueur L indiquée sur la figure 2 :



(a) Montrer que $L \sim L' \sim \sqrt{2Rh}$ quand $h \to 0$.

(b) Avec $R \simeq 6371$ km, justifier la formule approchée : $L \simeq 3,57\sqrt{h}$ avec h en mètres et L en kilomètres.

(c) Quelle est la portée du Mont-Blanc ? $(h = 4811\ m)$

(d) A quelle distance perd-on de vue une planche à voile (hauteur 4 mètres), les yeux étant situés à 1,70 m du sol ?

22. Une fève circulaire de rayon r est placée dans une galette circulaire, son centre étant à une distance d du centre ($r \leqslant d$).
    (a) Déterminer la probabilité p qu'un coup de couteau rectiligne passant par le centre rencontre la fève. (A.N. : $r = 1$ cm, $d = 10$ cm).
    (b) Déterminer un équivalent de p quand r tend vers 0 (d fixé).
        i. Montrer que $\arcsin(1-v) = \dfrac{\pi}{2} - \sqrt{2v} + o(\sqrt{v})$ quand v tend vers 0.
        ii. Déterminer un équivalent de $1 - p$ quand d tend vers r (r fixé).

CONTINUITÉ

I CONTINUITÉ EN UN POINT

23. :
    (a) Que dire d'une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et nulle sur $\mathbb{Q}$?
    (b) En déduire que deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$ et égales sur $\mathbb{Q}$ sont égales sur $\mathbb{R}$.

24. : Soit f est une fonction réelle définie sur $\mathbb{R}$. Montrer que si f^2 est continue en tout point de $\mathbb{R}$, f ne l'est pas forcément, mais que si f^3 est continue en tout point de $\mathbb{R}$ alors f l'est.

25. * : Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$, périodique et non constante ; montrer que f admet une plus petite période strictement positive.

    Indication : raisonner par l'absurde, noter $\mathcal{T}$ l'ensemble des périodes, et montrer que la borne inférieure de $\mathcal{T} \cap]0, +\infty[$ est nulle ; en déduire que $\mathcal{T}$ est dense dans $\mathbb{R}$ et conclure.

26. : Soit $f : x \mapsto \begin{cases} x+1 \text{ si } x \text{ est rationnel} \\ x \text{ si } x \text{ est irrationnel} \end{cases}$. Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur lui même et que f et f^{-1} ne sont continues en aucun point de $\mathbb{R}$.

27. : Équations fonctionnelles de Cauchy.
    (a) Montrer que si $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ alors,
    $$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad f(x+y) = f(x) + f(y) \quad \Leftrightarrow \quad \exists a \in \mathbb{R} \ / \ \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = ax$$
    Autrement dit, les endomorphismes continus du groupe $(\mathbb{R}, +)$ sont les applications linéaires.
    Indications pour $\Rightarrow$:
        i. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \quad f(nx) = nf(x)$
        ii. Montrer que $\forall n \in \mathbb{Z} \quad f(nx) = nf(x)$
        iii. Montrer que $\forall r \in \mathbb{Q} \quad f(rx) = rf(x)$
        iv. Conclure en utilisant l'exercice 23 (b).
    (b) En déduire que si $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+^*)$ alors,
    $$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad f(x+y) = f(x) f(y) \Leftrightarrow \exists a \in \mathbb{R} \ / \ \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = e^{ax} \Leftrightarrow \exists b > 0 \ / \ \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = b^x$$
    (c) En déduire que si $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ alors,
    $$\forall x, y > 0 \quad f(xy) = f(x) + f(y) \Leftrightarrow \exists a \in \mathbb{R} \ / \ \forall x > 0 \quad f(x) = a \ln x$$
    (d) En déduire que si $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}_+^*)$ alors,
    $$\forall x, y > 0 \quad f(xy) = f(x) f(y) \Leftrightarrow \exists a \in \mathbb{R} \ / \ \forall x > 0 \quad f(x) = x^a$$

28. * :
    (a) $a \neq 0$ et b étant deux réels fixés, montrer que les applications f continues sur $\mathbb{R}$ vérifiant $f(x+a) = f(x) + b$ pour tout réel x sont les applications de la forme $x \mapsto g(x) + \dfrac{b}{a}x$ où g est une application continue sur $\mathbb{R}$ et périodique de période a.

(b) En déduire toutes les applications continues de $\mathbb{R}_+^*$ vers $\mathbb{R}_+^*$ qui vérifient :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f(2x) = 3f(x)$$

29. : Soit $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ continue. On suppose qu'il existe $l = \lim\limits_{x \to +\infty} (f(x+1) - f(x))$ et que $l \in \mathbb{R}^*$.

   (a) Montrer que $f(x) \sim lx$ quand $x \to +\infty$.

   (b) Comparer avec le lemme de l'escalier concernant les suites (exercice 11).

30. * : Soit $A \subset B$ deux parties de $\mathbb{R}$; on dit que A est dense dans B lorsque tout intervalle du type $[x - \varepsilon, x + \varepsilon]$ avec x dans B et $\varepsilon > 0$ contient au moins un élément de A (autrement dit, tout voisinage d'un élément de B rencontre A)

   (a) Montrer que A est dense dans B ssi tout élément de B est limite d'une suite d'éléments de A.

   (b) Montrer que si f est une fonction numérique continue sur B alors

$$A \text{ dense dans } B \Longrightarrow f(A) \text{ dense dans } f(B)$$

31. * : Sommes de fonctions périodiques ; généralisation de 1 II. 2).

   (a) On considère deux applications f et g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continues, non constantes, mais périodiques de périodes respectives T_1 et T_2 dont le rapport est irrationnel ; montrer que $f + g$ n'est pas périodique.
   Indication : supposer $f + g$ périodique de période $T > 0$ et considérer h définie par $h(x) = f(x + T) - f(x)$, puis utiliser le fait (à justifier) que $T_1\mathbb{Z} + T_2\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$ pour montrer que h est nulle.

II CONTINUITE GLOBALE

1. Généralités

32. : Montrer que la fonction $\sqrt{\ }$ est uniformément continue sur $[0, +\infty[$

   (a) En utilisant le théorème de Heine.

   (b) En appliquant la première définition et en utilisant la relation, à prouver : $0 \leqslant y \leqslant x \Rightarrow \sqrt{y} - \sqrt{x} \leqslant \sqrt{y - x}$.

33. : Déterminer les valeurs de α pour lesquelles $f_\alpha : x \mapsto x^\alpha$ est uniformément continue sur $]0, +\infty[$ (avec utilisation du théorème de Heine).

34. : Montrer qu'une fonction continue et périodique sur $\mathbb{R}$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

35. : Montrer que si f est continue sur $\mathbb{R}_+$ et possède une limite finie en $+\infty$, alors f est uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$. Réciproque ?

36. * : On suppose f lipschitzienne sur tout intervalle $[0, A]$, avec $A > 0$; f est-elle forcément lipschitzienne sur $\mathbb{R}_+$? Et si l'on suppose de plus que f possède une limite finie en $+\infty$?

37. : Les ensembles constitués des fonctions suivantes sont-ils des sous-espaces vectoriels, des sous-anneaux de $\mathbb{R}^\mathbb{R}$?

   (a) Les fonctions bornées sur $\mathbb{R}$.

   (b) Les fonctions lipschitziennes sur $\mathbb{R}$.

   (c) Les fonctions lipschitziennes bornées sur $\mathbb{R}$.

   (d) *Les fonctions uniformément continues sur $\mathbb{R}$.

   (e) *Les fonctions uniformément continues bornées sur $\mathbb{R}$.

38. * : Soit f une fonction uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$ vérifiant pour tout x_0 de $[0, 1]$, $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x_0 + n) = l$ (pour le même l).

   (a) Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$.

   (b) Montrer que ce résultat devient faux si l'on suppose seulement f continue sur $\mathbb{R}_+$.

39. * : **Jeu sur une interversion de quantificateurs.**
On dit qu'une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est *nuticonne* en $x_0 \in D_f$ lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \alpha > 0 \;\; \forall x \in \mathbb{R} \quad |x - x_0| \leqslant \varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leqslant \alpha$$

(a) Montrer que si f est nuticonne en x_0, alors elle l'est aussi en x_1 et ceci quelque soit x_1.

(b) Caractériser les fonctions nuticonne en 0 (donc sur $\mathbb{R}$).

(c) Quelles sont les fonctions *uniformément nuticonnes*, c'est-à-dire vérifiant :

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \;\; \forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \alpha > 0 \quad |x - y| < \varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \alpha) \;\; ?$$

2. AUTOUR DU THÉORÈME DES VALEURS INTERMÉDIAIRES

40. : Soit f une fonction réelle continue sur un intervalle I non vide.

(a) Montrer que si f ne prend qu'un nombre fini de valeurs, alors elle est constante sur I.

(b) Montrer que si $|f|$ est constante sur I, alors f est constante sur I.

(c) Montrer que si f ne prend que des valeurs entières, alors elle est constante sur I (montrer qu'on a le même résultat, en remplaçant "entières" par "rationnelles" ou par "irrationnelles").

(d) Montrer plus généralement que si f prend ses valeurs dans un ensemble de complémentaire dense (par exemple dénombrable) alors elle est constante sur I.

41. : Un théorème du point fixe :
Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ telle que $f([a, b]) \subset [a, b] \quad (a \leqslant b)$

(a) Démontrer que : $\exists c \in [a, b] \quad f(c) = c$.

(b) Montrer que ce résultat est faux si on remplace $[a, b]$ par $]a, b]$, ou si on ne suppose plus f continue sur $[a, b]$

(c) Démontrer que de même, si f est une fonction continue sur $[a, b]$ telle que $[a, b] \subset f([a, b]) \quad (a \leqslant b)$, alors $\exists c \in [a, b] \quad f(c) = c$.

42. : Déterminer suivant la valeur de $\lambda \in \mathbb{R}$, le nombre de solutions de l'équation

$$E_\lambda : e^{\lambda x} = x, \text{avec } x \in \mathbb{R}$$

43. :

(a) Soit f une fonction continue et périodique de période $T > 0$ sur $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe un réel c tel que $f(c + T/2) = f(c)$.

(b) Application : à tout point M d'un cercle, on fait correspondre une grandeur physique (par exemple la température en M) qui varie continûment sur le cercle ; montrer qu'il existe forcément sur le cercle deux points diamétralement opposés où la grandeur physique prend la même valeur.

(c) En déduire par exemple qu'il existe à chaque instant sur la terre deux points antipodaux où la température est la même, et deux points antipodaux où la pression est la même.

(d) Autre application : soit (C) une courbe fermée continue entourant O telle que toute droite passant par O coupe la courbe en deux points exactement. Montrer qu'il existe une droite passant par O où les deux points d'intersection sont à même distance de O.

44. : Soit f une fonction réelle continue sur $\mathbb{R}$ et qui atteint sa borne inférieure en un réel a.

(a) Montrer qu'alors pour tout réel u il existe un réel c tel que $f(c + u) = f(c)$ (propriété remarquée par Éric Guérin, sup 2004, améliorée par Lévi Caparéda, sup 2008).

(b) * Existe-t-il forcément une fonction $u \mapsto c(u)$ continue sur $\mathbb{R}$ telle que $f(c(u) + u) = f(c(u))$ pour tout u ?

45. : Le théorème "des cordes" ; soit f une fonction continue sur $[0, T]$, $T > 0$, n un entier > 0.

(a) On suppose d'abord $f(0) = f(T)$: démontrer qu'il existe $c \in [0, T - T/n]$ tel que $f\left(c + \dfrac{T}{n}\right) = f(c)$.

Indication : poser $g(x) = f\left(x + \dfrac{T}{n}\right) - f(x)$ et calculer $\sum\limits_{k=0}^{n-1} g\left(\dfrac{k}{n}T\right)$.

(b) $f(0)$ et $f(T)$ sont ici quelconques ; démontrer qu'il existe $c \in [0, T - T/n]$ tel que le taux d'accroissement de f entre c et $c + T/n$ soit le même que celui entre 0 et T.

(c) Application : une voiture part à l'instant 0 d'un mouvement continu. Au bout d'un temps T, elle a parcouru la distance L ; démontrer que sur la route suivie par la voiture, il existe deux points A et B, distants de $\dfrac{L}{n}$, tels que la voiture ait mis exactement le temps $\dfrac{T}{n}$ pour aller de A à B. Déterminer précisément ces points quand le mouvement est uniformément accéléré.

(d) * : On suppose $f(0) = f(T)$; pour quels réels $U \in]0, T[$, existe-t-il forcément un réel $c \in [0, T - U]$ tel que $f(c + U) = f(c)$?

46. : Rapport entre propriété des valeurs intermédiaires et continuité.

(a) On définit f par $f(x) = \sin \dfrac{1}{x}$ pour $x \neq 0$, et $f(0) = 0$. Montrer que l'image par f de tout intervalle de $\mathbb{R}$ est un intervalle, ceci bien que f ne soit pas continue sur $\mathbb{R}$.

(b) * Soit f une fonction sur $\mathbb{R}$ telle que l'image par f de tout intervalle de $\mathbb{R}$ est un intervalle ; montrer que si l'on suppose de plus f injective, alors f est forcément continue.

Première piste : commencer par montrer que f est monotone.

Deuxième piste : supposer que f est discontinue en x_0 ; justifier alors qu'il existe une suite (u_n) tendant vers x_0 telle que $|f(u_n) - f(x_0)| \geqslant 1$; montrer que l'ensemble $f^{-1}(\{f(x_0) + 1, f(x_0) - 1\})$ possède forcément une infinité d'éléments.

3. **AUTOUR DU THÉORÈME DE WEIERSTRASS**

47. Autre démonstration du fait qu'une fonction continue sur un segment est bornée.

Soit f une fonction continue sur un segment $[a, b], a < b$. Soit c la borne supérieure des réels u de $[a, b]$ tels que f soit bornée sur $[a, u]$; montrer que $c = b$ et conclure.

48. :

(a) Démontrer que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue sur $[a, b]$ et si $\forall x \in [a, b] \quad f(x) > 0$, alors, $\exists \lambda > 0 \quad \forall x \in [a, b] \quad f(x) \geqslant \lambda$.

(b) Montrer que ce résultat est faux si on prend un intervalle non fermé, ou si on prend f non continue.

(c) En déduire que si $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont continues sur $[a, b]$ et si $\forall x \in [a, b] \quad f(x) < g(x)$, alors, $\exists \lambda > 0 \ / \ \forall x \in [a, b] \quad f(x) + \lambda \leqslant g(x)$.

49. : Soit f une application continue périodique de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

(a) Démontrer que f est bornée sur $\mathbb{R}$ et atteint ses bornes . On en déduit donc, d'après l'exercice 44, que pour tout réel U il existe un réel c tel que $f(c + U) = f(c)$.

(b) Justifier que le c du a) peut être pris entre 0 et T.

(c) * En déduire qu'il existe sur la terre à tout instant deux points distants de 100 km qui sont à même température.

(d) * Autre application : si f est une fonction réelle continue sur $[0, T], T > 0$, telle que $f(0) = f(T)$, et $T = U + V$ avec $U, V > 0$, il existe $c \in [0, V]$ tel que $f(c) = f(c + U)$ ou bien $c \in [V, T]$ tel que $f(c) = f(c - V)$ (comparer avec l'ex. 45.)

50. : Soit f une fonction réelle continue sur $[0, +\infty[$.

(a) Montrer que si f possède une limite finie en $+\infty$, alors f est bornée sur $[0, +\infty[$.

(b) Que dire de la réciproque ?

51. : Soit f une fonction réelle continue sur $\mathbb{R}$ ayant une limite finie l_1 en $-\infty$ et une limite finie l_2 en $+\infty$.

(a) Montrer que f est bornée.

(b) Montrer que si $l_1 = l_2$, f atteint sa borne inférieure ou sa borne supérieure.

52. : On pose $f : x \mapsto x^2 + 2x + 3$; $g : x \mapsto -x^2 - x + 8$ et on définit h par $h(x) = \max(f(x), g(x))$; pourquoi sait-on à l'avance que $h([-3, 2]) = [a, b]$? Déterminer a et b.

53. :

(a) Montrer que chacun des énoncés suivants est faux, en donnant un exemple de fonction f ne le vérifiant pas (un dessin suffira) ; I est un intervalle de $\mathbb{R}$ inclus dans $\mathcal{D}_f$.

i. Si $I = [a, b]$ et f monotone sur I, alors $f(I) = [f(a), f(b)]$.

ii. Si $f(I)$ est un intervalle alors f est continue sur I.

iii. Si f est continue sur I, alors l'image réciproque d'un intervalle inclus dans $f(I)$ est un intervalle.

iv. Si f est continue sur I et $f(I) = I$, alors $\exists x \in I \quad / \quad f(x) = x$.

v. Si $f([a, b]) = [a, b]$, alors $\exists x \in [a, b] \quad / \quad f(x) = x$

(b) Rajouter une condition dans la première partie des énoncés précédents de sorte que la conclusion soit vraie.